Probleme de antrenament - Setul 2

Problema 1

a) Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ecuaţia matriceală $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ecuaţia matriceală $X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ecuaţia matriceală $X^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

Problema 2

Să se determine toate matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea $A^2 = A$.

Problema 3

a) Arătaţi că $f(n) = g(n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, unde

$$f(n) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}, \qquad g(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n+1}.$$

b) Demonstraţi că $(n+1) \cdot (n+2) \cdot ... \cdot (2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 4

Elevii A şi B participă la următorul joc:

”Se dă ecuaţia $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$. Mai întâi A dă o valoare număr întreg unuia dintre coeficienţi. Apoi B dă o valoare număr întreg unuia dintre coeficienţii necunoscuţi. In final A alege valoarea ultimului coeficient încă necunoscut.”

Demonstraţi că A poate face ca toate cele trei soluţii ale ecuaţiei obţinute să fie numere întregi.

Problema 5

a) Dacă $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, să se calculeze $s_n = t^2 + t^3 + ... + t^n$ şi $S_n = 2t + 3t^2 + ... + nt^{n-1}$, pentru $t \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, pentru $t \in (-1, 1)$.

c) Să se rezolve ecuaţia $\dfrac{\ln(x^2)}{(\ln x)^2} + \dfrac{\ln(x^3)}{(\ln x)^3} + \dfrac{\ln(x^4)}{(\ln x)^4} + ... = 8$, ştiind că $x > \mathrm{e}$.

Problema 6

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+a^x)}{\ln(1+b^x)}$, pentru $a, b \in (0, \infty)\backslash\{1\}$.