

Probleme de antrenament - Setul 4

1. Arătați că $1 \cdot 2 \cdot C_n^2 + 2 \cdot 3 \cdot C_n^3 + \dots + (n-1) \cdot n \cdot C_n^n = n \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2}$, $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2$.
2. Calculați $S_n = \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)$ pentru $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$.
3. Demonstrați că $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$, $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 1$.
4. Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right) \cdot x$.
5. Demonstrați că:
 - a) $e^x > \frac{1}{1+x}$, $\forall x > 0$;
 - b) $e^x > 1 + \ln(1+x)$, $\forall x > 0$
 - c) $e^x > 1 + (1+x) \cdot \ln(1+x)$, $\forall x > 0$.
6. Calculați suma $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+3)}$ pentru $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$.