Probleme de antrenament

Partea I Subiectele 1-8 au un singur răspuns corect

(5p)Subiectul 1.

Suma soluţiilor ecuaţiei $10^x + 4^x - 2 \cdot 25^x = 0$ este:

a) 1 b) 0 c) -2 d) -1

(5p)Subiectul 2.

Se consideră mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Probabilitatea ca alegând la întamplare o submulţime dintre submulţimile nevide ale mulţimii A aceasta să aibă cel puţin 3 elemente este:

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1

(5p)Subiectul 3.

Cea mai mică valoare a numărului real m știind că vectorii $\vec{u} = (m-3)\vec{i} + 4$ și $\vec{v} = 8\vec{i} - (15-m)\vec{j}$ sunt coliniari este:

a) $-9+2\sqrt{17}$ b) 0 c) $-\frac{84}{12}$ d) $9 - 2\sqrt{17}$

(5p)Subiectul 4.

Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $\left(\frac{3}{4}\right)^{-6x+10-x^3} < \frac{27}{64}$ este:

a) $(-\infty, 1)$ b) $(2, \infty)$ c) $(-\infty, 1]$ d) $(-\infty, 3)$

(5p)Subiectul 5.

Fie $z_1 = a + ib$ și $z_2 = \frac{1-\overline{z_1}}{1+\overline{z_1}}$ două numere complexe . Cum trebuie ales z_1 astfel încât $z_1 - z_2$ și ${z_2}^2$ să fie numere reale iar $b \neq 0$?

a) $z_1 = i$ și $z_1 = -i$ b) $z_1 = i$ sau $z_1 = -i$ c)) $z_1 = 1$ și $z_1 = -1$ d) $z_1 = -1$ sau $z_1 = -i$

(5p)Subiectul 6.

Fie $l_1 = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - arctgx\right)^{\frac{1}{lnx}}$

$l_2 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(sinx)^{\frac{1}{2x-\pi}}$. Atunci $l_1 + l_2$ este:

a) 1 b) -1 c) 0 d) 2

(5p)Subiectul 7.

Fie α o rădăcină a ecuației $x^2 + x + 1 = 0$. Suma elementelor matricei $A^n, n = 3$, unde A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{pmatrix}$ este egală cu:

a) 9 b) 18 c) 3 d) 27

(5p)Subiectul 8.

Se consideră ecuația: $2\sqrt[3]{2(log_{16}^2 x)^2} - \sqrt[3]{log_2 x} - 6 = 0$. Raportul $\frac{x_1}{x_2}$, unde x_1, x_2 sunt soluţii ale ecuaţiei este:

a) nu există b) 2^{30} c) 2^{19} d) 2^{35}

Partea a II-a Soluțiile se redactează complet pe foaia de examen

1. Se consideră numărul $a = \frac{\sqrt{10} - i\sqrt{2}}{2}$ şi polinomul $f \in \mathbb{Q}[x]$, $f = x^4 - 4x^2 + 9$.

(5p) a) Să se arate că $f(a) = 0$.

(5p) b) Să se arate că polinomul f este reductibil în $\mathbb{R}_{[x]}$ şi în $\mathbb{C}_{[x]}$ şi ireductibil în $\mathbb{Q}_{[x]}$.

(5p) c) Să se calculeze $a_1^6 + a_2^6 + a_3^6 + a_4^6$, unde a_1, a_2, a_3, a_4 sunt rădăcinile polinomului f.

2. Se consideră funcţiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{2002}$ şi $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(2p) a) Să se calculeze $f(1)$.

(5p) b) Să se arate că $F'_{(x)} = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(5p) c) Ştiind că funcţia $F(x)$ este bijectivă, să se calculeze $\int_0^a g(x)\,dx$, unde $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reprezintă inversa funcţiei $F(x)$ şi $a = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2003}$.

3. Se consideră funcţiile $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = xe^x$ şi $f_{n+1}(x) = f_n'(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(2p) a) Să se rezolve ecuaţia $f_2(x) = 0$.

(5p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(5p) c) Să se determine asimptota la graficul funcţiei f_0 către $-\infty$.

4. Pe mulţimea G=(-1,1) se consideră legea de compoziție „∗”, definită prin x∗y=$\frac{x+y}{1+xy}$. Se mai consideră funcția $f: (-1,1) \to (0, \infty), f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ şi funcţia g: $(0, \infty) \to (-1,1), g(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

(2p)a) Să se arate că $(\mathrm{f} * g)_{(x)}, \forall x \in (0, \infty)$.

(4p)b)Să se arate că $\mathrm{f}(x_1 * x_2 * x_3 \ldots . * x_n) = \mathrm{f}(x_1) f(x_2) \mathrm{f}(x_3) \ldots \ldots . f(x_n), \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$.

(5p) c) Să se calculeze $\frac{1}{2} * \frac{1}{4} * \ldots \ldots * \frac{1}{2000} * \frac{1}{2002}$.