Numele si prenumele .... Liceul	Nr. concurs

Concursul de matematică "Marcel Roşculeţ"

Ediţia a patra, 10 mai 2014

Partea I Subiectele 1-8 au un singur răspuns corect. Răspunsul corect se marchezaă cu X în tabelul primit de dvs.

Subiectul 1.
Dacă $z \in \mathbb{C}$ şi $z + 2\overline{z} = 6 + \mathrm{i}$, atunci
a) $|z| = \sqrt{3}$; **b)** $|z| = \sqrt{5}$; **c)** $|z| = \sqrt{10}$; **d)** $|z| = 10$; **e)** $|z| = 8$; **f)** $|z| = \sqrt{8}$.

Subiectul 2.
Produsul soluţiilor ecuaţei $\sqrt{3x+3} + 4x = 5$ este
a) $\frac{11}{8}$; **b)** $\frac{11}{16}$; **c)** 2; **d)** $\frac{43}{16}$; **e)** 22; **f)** $-\frac{43}{16}$.

Subiectul 3.
Numărul soluţiilor ecuaţei $2^x = x^2$ este
a) 0; **b)** 1; **c)** 4; **d)** 2; **e)** 3; **f)** 5.

Subiectul 4.
Câte perechi de numere reale x şi y verifică relaţia $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$?
a) niciuna; **b)** două; **c)** o infinitate; **d)** trei; **e)** patru; **f)** una.

Subiectul 5.
Calculaţi $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{1-\ln(\mathrm{e}-\mathrm{x})}}$.
a) e; **b)** 1; **c)** $\sqrt{\mathrm{e}}$; **d)** 0; **e)** ∞; **f)** $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Subiectul 6.
Suma modulelor soluţiilor reale ale ecuaţiei $x - x^3 + x^5 - x^7 + ... + x^{101} - x^{103} = 0$ este
a) 0; **b)** 1; **c)** 4; **d)** 103; **e)** 51; **f)** 2.

Subiectul 7.
Determinaţi punctele de întoarcere ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$.
a) $x = 0$; **b)** $x = 2$; **c)** $x = \frac{1}{2}$; **d)** $x \in \emptyset$; **e)** $x = 0$ şi $x = 1$; **f)** $x = 1$.

Subiectul 8.
Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + ax + x^2)}{\sqrt{x+b} - 1} = 2$. Dacă $\lambda = a + b$, atunci
a) $\lambda = 0$; **b)** $\lambda = 3$; **c)** $\lambda = 4$; **d)** $\lambda = -1$; **e)** $\lambda = \frac{1}{2}$; **f)** $\lambda = 2$.

Partea a II-a Se tratează la alegere trei dintre subiectele 9, 10, 11, 12. Soluţiile se redactează pe file diferite. Marcaţi în colţul din dreapta sus al fiecărei foi: numărul subiectului, fila, numărul de concurs.

Subiectul 9.

Fie suma $S_n = 1 + 11 + 111 + \cdots + 1\ldots 1$, unde ultimul termen conţine n cifre.

a) Să se calculeze S_n pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Determinacti $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât S_n să de dividă cu 3.

c) Determinacti $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât S_n să de dividă cu 5.

d) Determinacti $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât S_n să de dividă cu 9.

Subiectul 10.

Fie matricele de ordinul doi $A = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

a) Calculaţi A^n şi B^n, pentru $n \in \mathbb{N}$.

b) Studiaţi inversabilitatea matricelor A şi B. Dacă există determinaţi inversa.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} S_k$, unde S_k este suma elementelor matricei $A^{2k+1} + B^{2k+1}$.

Subiectul 11.

Se consideră funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - a^2}$, unde $a \in \mathbb{R}$ iar $D \subset \mathbb{R}$.

a) Dacă D este domeniul maxim de definiţie, studiaţi monotonia funcţiei şi determinaţi asimptotele.

b) Dacă $D = (-a, a)$, $a > 0$, să se arate ca f este inversabilă şi să se calculeze inversa sa f^{-1};

c) Pentru $a > 1$, calculaţi $\int\limits_{-1}^{1} |f(x)| \mathrm{d}x$.

Subiectul 12.

Fie n un număr natural nenul. Notăm $I_p = \int\limits_{-1}^{1} x^{2p+1} \cos 2n\pi x \mathrm{d}x$ pentru $p \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se determine o relaţie de recurenţă între I_p şi I_{p-1}.

c) Să se calculeze I_{2014}.