Numele şi prenumele	Clasa	Nr. concurs
Liceul	....	

Concursul de matematică "Marcel Roşculeţ"
Ediţia a VII-a, 6 mai 2017

Partea I   Subiectele 1-12 au un singur răspuns corect. Răspunsul corect se marchează cu X în tabelul primit de dvs.

Subiectul 1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x, & x<0 \\ ax^2+bx, & x\geq 0\end{cases}$. Atunci f este bijectivă dacă şi numai dacă
a) $b\geq 0, a>0$ sau $a=0, b>0$; **b)** $b<0, a>0$ sau $a=0, b>0$; **c)** $b\leq 0, a>0$;
d) $b<0, a=0$ sau $a=0, b>0$; **e)** $b\leq 0, a>0$ sau $a=0, b\geq 0$; **f)** $b<0, a\geq 0$.

Subiectul 2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x+a}{x^2+x+1}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $\text{Im}f=[\frac{1}{3},3]$.
a) $a=0$; **b)** $a=2, a=3$; **c)** $a=1$; **d)** $a=-1$; **e)** $a=-1, a=1$; **f)** $a=2, a=4$.

Subiectul 3. Pentru ce valori ale parametrului real m, sistemul $\begin{cases} x^2+y^2=z \\ x+y+z=m\end{cases}$ are soluţie reală unică.
a) $m\in\mathbb{R}$; **b)** $m=\frac{1}{2}$; **c)** $m=0$; **d)** $m=-\frac{1}{2}$; **e)** $m\in\{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\}$; **f)** $m\in(0,\frac{1}{2})$.

Subiectul 4. Soluţiile ecuaţiei $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x+(\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x=10$ sunt
a) $\{\pm 1\}$; **b)** $\{\pm 2\}$; **c)** $\{\pm\sqrt{2}\}$; **d)** $\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\}$; **e)** $\{\pm\frac{1}{2}\}$; **f)** $\{\pm 4\}$.

Subiectul 5. Să se rezolve ecuaţia $16^{|x|}-2\cdot 4^{|x|}-8=0$.
a) $x\in\{1\backslash 2,-1\backslash 2\}$; **b)** $x\in\{1,-1\}$; **c)** $x\in\{1\backslash 2,1\}$; **d)** $x=1$; **e)** $x=1/2$;
f) $x\in\{-1,-1\backslash 2,1\backslash 2,1\}$.

Subiectul 6. Să se calculeze $\left|\dfrac{\alpha+\mathrm{i}}{\alpha-\mathrm{i}}\right|$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$.
a) $\frac{|\alpha|+1}{|\alpha|-1}$; **b)** $2|\alpha|$; **c)** $\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$; **d)** $|\alpha|$; **e)** $\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$; **f)** 1.

Subiectul 7. Pentru câte valori ale lui $m\in\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} x-my+z=2 \\ x+y-mz=2 \\ 2x-y+3z=4\end{cases}$ este compatibil simplu nedeterminat ?
a) o singură valoare; **b)** două valori; **c)** trei valori; **d)** nici o valoare; **e)** patru valori;
f) o infinitate de valori.

Subiectul 8. Să se determine parametrii reali a,b astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^4+ax+2, & x<0 \\ b+\ln(1+x^4), & x\geq 0\end{cases}$ să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.
a) $a=0, b=2$; **b)** $a=2, b=0$; **c)** $a=1, b=-1$; **d)** $a=-1, b=1$; **e)** $a=1, b=2$;
f) $a=0, b\in\mathbb{R}$.

Subiectul 9. Dacă z este soluţie a ecuaţiei $|z| + z = 8 + 4\mathrm{i}$, atunci $|z|$ este
a) 8; **b)** 5; **c)** 3; **d)** 4; **e)** 1; **f)** 2.

Subiectul 10. Fie $f(x) = mx - \ln(1 + x^2), \forall m \in \mathbb{R}$, şi $A = \{m \in \mathbb{R} | f \text{ este crescătoare}\}$. Care afirmaţie este adevărată ?
a) $A = (-1, 1)$; **b)** $A = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; **c)** $A = [1, \infty)$; **d)** $A = \emptyset$; **e)** $A = (-\infty, -1)$;
f) $A = (1, \infty,)$.

Subiectul 11. Să se rezolve inecuaţia $\left(\frac{2}{3}\right)^{10-6x-x^3} < \frac{8}{27}$.
a) $x \in (-\infty, -1)$; **b)** $x \in \emptyset$; **c)** $x \in (-1, 1)$; **d)** $x < 1$; **e)** $x > 1$; **f)** $x \in (0, 1)$.

Subiectul 12. Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $\log_{2017}(x-2\sqrt{2})+\log_{2017}(x+2\sqrt{2}) = 1$ este
a) 3; **b)** 4; **c)** 2; **d)** 0; **e)** 1; **f)** o infinitate.

Partea a II-a Participanţii de clasa a XI-a tratează subiectele 13 şi 14. Participanţii de clasa a XII-a tratează subiectele 15 şi 16.
Soluţiile se redactează pe file diferite pentru fiecare subiect. Marcaţi în colţul din dreapta sus al fiecărei foi: numărul subiectului, fila, numărul de concurs.

Subiectul 13. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ -2 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$.
a) Să se determine toate matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care au proprietatea $XA = AX$.
b) Să se rezolve ecuaţia $X^2 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Subiectul 14. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(1 - x \ln x)$.
a) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.
b) Să se determine numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $f(x) = 0$.
c) Să se demonstreze că $f(x) > 0, \forall x \in (0, 1)$, şi $f(x) < 0, \forall x \in (\mathrm{e}, \infty)$.

Subiectul 15. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \int\limits_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t$.
a) Să se arate că $f(1) > 2 - \mathrm{e}$.
b) Să se studieze monotonia funcţiei f.
c) Să se arate că f este funcţie nemărginită.

Subiectul 16. Se dă polinomul $P = X^n - (X^{n-1} + X^{n-2} + ... + X + 2)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.
a) Arătaţi că P se divide cu $X - 2$.
b) Pentru $n = 2017$ aflaţi rădăcinile polinomului P.
c) Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, calculaţi suma rădăcinilor nereale ale polinomului P.